

TD 3

Equivalence ricardienne et démographie

References

Buiter, Willem H. (1988) “Death, birth, productivity growth and debt neutrality.” *The Economic Journal* 98(391), pp. 279–293

Il y a équivalence ricardienne dans une économie si la manière dont l’Etat finance ses dépenses n’a pas d’effet réel. Il est équivalent que l’État se finance par impôt ou par dette. L’argument est le suivant. Si l’État se finance par émission de dette, les agents anticipent parfaitement l’augmentation de taxes futures et ce faisant diminuent leur consommation de la même façon. Les hypothèses sous-

jaçantes à la validité de l’équivalence ricardienne sont les suivantes :

- (i) Horizon de vie infini : sinon ce sont d’autres agents qui rembourseront la dette. . .
- (ii) Taxes *lump-sum* : sinon les taxes créent des distorsions sur le comportement des agents et cela implique que le timing des taxes comptent.
- (iii) Pas d’environnement stochastique : sinon l’anticipation des agents diffère de la réalisation.

Ainsi, le modèle avec agent représentatif à horizon de vie infini et le modèle à générations imbriquées avec agents vivant deux périodes ont des implications très différentes : l’équivalence ricardienne tient dans le premier cadre mais le “timing” des impôts n’est pas indifférent dans le second.

Une manière de retrouver l’équivalence dans un modèle à générations est de considérer altruisme, leg et comportement dynastique. Les agents qui ont contracté la dette doivent se sentir ‘responsables’ de son remboursement.

Dans ce modèle, les individus ne sont pas altruistes et ont une probabilité de décès exogène, indépendante de leur âge.

A Démographie

1. Calculer n le taux de croissance de la population.

La taille de la population à la date $t + 1$ s'écrit :

$$N_{t+1} = (1 + n)N_t = (1 - p)N_t + bN_{t+1}$$

We deduce that :

$$n = \frac{b - p}{1 - b}$$

Le taux de croissance de la population est positif s'il y a plus de naissances que de décès !

2. Donner la probabilité pour un agent né à la période s meure avant le début de la période $t > s$.

La probabilité pour un agent né en période s d'être en vie à la période $s + 1$ est $(1 - p)$ et par récurrence, sa probabilité d'être en vie à la période $t > s$ est $(1 - p)^{t-s}$.

On suppose que la loi des grands nombres s'applique de sorte que $(1 - p)^{t-s}$ est aussi la part de la cohorte de la période s encore en vie au début de la période t .

B Dotations, système viager et évolution de la richesse financière

On note $a_{s,t}$ la richesse financière à la période t d'un agent né à la période s . Un agent commence avec une richesse financière $a_{s,s} = 0$. A chaque période, il reçoit un salaire w_t et paie un montant d'impôts τ_t . A la période t , un agent dispose d'un montant $a_{s,t} + w_t - \tau_t$ qu'il peut soit consommer, soit placer. Le placement de la période t est doublement rémunéré à la période $t + 1$:

- au taux d'intérêt réel r , constant au cours du temps,
- via une prime proportionnelle (\equiv rendement viager lié aux décès des autres) à son épargne.

On suppose en effet qu'il existe un système viager parfaitement concurrentiel (i.e. profit nul) dont le principe est le suivant : à chaque période un agent reçoit une prime proportionnelle à son épargne; en échange, il rétrocède l'intégralité de sa richesse financière au jour de sa mort.

2. Ecrire la loi d'évolution de la richesse financière d'un individu né à la période s pendant la durée de sa vie, à taux actuariel Π donné.

L'agent place son épargne $a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_t$ qui lui rapporte le taux sans risque et un rendement

$$\begin{aligned} a_{s,t+1} &= (1 + r)(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_t) + \Pi(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_t) \\ &= (1 + r + \Pi)(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_t) \end{aligned}$$

3. Ecrire l'ensemble des dépenses et des recettes pour le système viager et déterminer le taux Π vérifiant la condition de profit nul.

On suppose que le système viager est concurrentiel (hypothèse de libre entrée). Le compte de résultat du système viager est :

- dépenses en période t :

$$\sum_{s < t} (1-p)^{t-s} \Pi (a_{s,t-1} + w_{t-1} - \tau_{t-1} - c_{t-1}) b N_s$$

- recettes en période t :

$$\sum_{s < t} p(1-p)^{t-1-s} (1+r) (a_{s,t-1} + w_{t-1} - \tau_{t-1} - c_{t-1}) b N_s$$

La condition de profit nul implique :

$$\begin{aligned} (1-p)\Pi &= p(1+r) \\ \text{et } \Pi &= (1+r) \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

Le rendement total versé aux survivants $(=(1-p)\Pi)$ est égal au rendement total de des décédés $(p(1+r))$.

4. Montrer que le taux d'intérêt (brut) total pour l'épargne des individus est $\frac{1+r}{1-p}$. Par la suite on notera $1+r_h \equiv \frac{1+r}{1-p}$.

La rémunération totale de l'épargne s'écrit :

$$\begin{aligned} 1+r_h &= 1+r+\Pi = 1+r+(1+r) \frac{p}{1-p} \\ &= \frac{1+r}{1-p} \end{aligned}$$

Le rendement sans risque est égal à l'espérance du rendement total de l'épargne : avec proba p je décède et je cède toute ma richesse (rendement 0) et avec proba $1-p$ je survie et ma richesse rapporte $1+r_h$.

C Comportement de consommation optimal

Cette partie introduit à la théorie du revenu permanent dans le cas où la durée de vie est incertaine.

Un agent appartenant à la cohorte née à la période s cherche à maximiser

$$U_s = \sum_{t=s}^{\infty} (1-p)^{t-s} \beta^{t-s} \log(c_{s,t})$$

L'évolution de la richesse est contrainte par la condition suivante (condition de transversalité) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{s,t}}{(1+r_h)^t} = 0$$

5. Ecrire le programme de maximisation d'un agent né à la période s et le Lagrangien associé.

Le programme est le suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=s}^{\infty} [(1-p)\beta]^{t-s} \log(c_{s,t}) \\ \text{s.c.} \quad & a_{s,t+1} = (1+r_h)(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_t) \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{s,t}}{(1+r_h)^t} = 0 \\ & a_{s,s} = 0 \end{aligned}$$

On normalise les multiplicateurs de Lagrange de sorte que

$$\mathcal{L} = \sum_{t=s}^{\infty} [(1-p)\beta]^{t-s} \{ \log(c_{s,t}) + \lambda_{s,t} [(1+r_h)(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_{s,t}) - a_{s,t+1}] \}$$

6. Dériver les conditions du premier ordre et montrer que :

$$\frac{c_{s,t+1}}{c_{s,t}} = \beta(1+r)$$

Les CPO fournissent :

$$\begin{aligned} u'(c_{s,t}) &= \lambda_{s,t}(1+r_h) \\ \lambda_{s,t+1}(1+r_h)\beta(1-p) &= \lambda_{s,t} \end{aligned}$$

On en déduit alors la condition d'Euler :

$$\frac{c_{s,t+1}}{c_{s,t}} = \frac{u'(c_{s,t})}{u'(c_{s,t+1})} = \frac{\lambda_{s,t}}{\lambda_{s,t+1}} = (1+r_h)\beta(1-p) = \beta(1+r)$$

7. En utilisant la condition de transversalité, écrire la contrainte budgétaire intertemporelle. On notera :

$$h_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(w_{t+i} - \tau_{t+i})}{(1+r_h)^i}$$

La contrainte budgétaire est la suivante :

$$a_{s,t+1} = (1+r_h)(a_{s,t} + w_t - \tau_t - c_{s,t})$$

Il ne reste alors qu'à la sommer pour obtenir la contrainte budgétaire intertemporelle.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_{s,t+i}}{(1+r_h)^i} = a_{s,t} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(w_{t+i} - \tau_{t+i})}{(1+r_h)^i} = a_{s,t} + h_t$$

8. Déterminer $c_{s,t}$ pour $t \geq s$ en fonction de $a_{s,t}$ et de h_t .

L'équation d'Euler implique :

$$c_{s,t+i} = [\beta(1+r)]^i c_{s,t}$$

(NB : dans le cas général, lorsqu'on suppose que la condition du premier ordre est vérifiée, cela veut dire qu'on fait implicitement l'hypothèse que

les marchés financiers sont parfaits et qu'il n'y a pas de contraintes de liquidité).

Donc la contrainte budgétaire s'écrit :

$$c_{s,t} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\beta(1+r)}{1+r_h} \right)^i = a_{s,t} + h_t$$

La consommation de la période t d'un agent né à la période s est donc :

$$c_{s,t} = \Omega(a_{s,t} + h_t)$$

avec

$$\Omega = 1 - \beta(1-p)$$

Dans le cas standard d'un agent avec horizon infini sans mortalité, on a une propension marginale à consommer la richesse totale (i.e. humaine + financière) égale à $1 - \beta$. Cette fonction de consommation n'a rien à voir avec la fonction de consommation "keynésienne" selon laquelle les agents consomment à proportion de leur revenu disponible courant. Ici consommation et revenu courant sont possiblement complètement déconnectés.

9. Ecrire C_t la consommation agrégée sur l'ensemble de la population.

Pour calculer la consommation agrégée de la date t , on doit agréger sur les différentes cohortes passées, en prenant en compte le fait qu'elles ont diminué de taille depuis leur apparition.

Il est immédiat que la taille en t de la cohorte née à la période s est $(1-p)^{t-s}bN_s$. Donc :

$$\begin{aligned} C_t &= \sum_{s \leq t} c_{s,t} (1-p)^{t-s} bN_s \\ &= \Omega \sum_{s \leq t} (a_{s,t} + h_t) (1-p)^{t-s} bN_s \\ &= \Omega \sum_{s \leq t} a_{s,t} (1-p)^{t-s} bN_s + \Omega \sum_{s \leq t} h_t (1-p)^{t-s} bN_s \end{aligned}$$

D Finances publiques

L'Etat réalise des dépenses G_t (qui n'apparaissent pas dans la fonction d'utilité des agents), qu'il peut financer soit par l'impôt (on note T_t les prélèvements fiscaux agrégés), soit par la dette, sur laquelle il paie un taux d'intérêt r .

10. Ecrire la loi d'évolution de la dette D_t .

$$\frac{D_{t+1}}{1+r} = D_t + G_t - T_t$$

11. L'évolution de la dette est contrainte par la condition suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_t}{(1+r)^t} = 0$$

Montrer qu'on doit avoir :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+r)^i} = D_t + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+r)^i}$$

La loi d'évolution de la dette entre t et T implique :

$$D_T = (1+r)^T D_t + \sum_{i=0}^{T-t} (1+r)^{T-i} (G_{t+i} - T_{t+i})$$

$$\frac{D_T}{(1+r)^T} = D_t + \sum_{i=0}^{T-t} \frac{G_{t+i} - T_{t+i}}{(1+r)^i}$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_T}{(1+r)^T} = 0 &\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+r)^i} = D_t + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+r)^i} \\ &\Rightarrow D_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T_{t+i} - G_{t+i})}{(1+r)^i} \end{aligned}$$

E Equilibre et condition pour la neutralité de la dette

12. Expliquer pourquoi on doit avoir à chaque période $A_t = D_t$.

La contre-partie de la richesse financière agrégée sur tous les agents privés, c'est nécessairement la dette de l'Etat.

$$A_t = D_t$$

$$\begin{aligned} C_t &= \Omega(A_t + H_t) \\ &= \Omega(D_t + H_t) \end{aligned}$$

13. Substituer dans C_t l'expression de D_t en fonction des excédents budgétaires futurs.

Prise en compte de la contrainte budgétaire intertemporelle de l'Etat dans la consommation agrégée

On a :

$$D_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T_{t+i} - G_{t+i})}{(1+r)^i}$$

Donc :

$$C_t = \Omega \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T_{t+i} - G_{t+i})}{(1+r)^i} + H_t \right)$$

14. Montrer que la consommation est indépendante du chemin de taxe choisi si et seulement si :

$$b = 0$$

On fait apparaître dans la richesse humaine les impôts futurs :

$$\begin{aligned} H_t &= h_t N_t \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i}}{(1+r_h)^i} N_t - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau_{t+i}}{(1+r_h)^i} N_t \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i}}{(1+r_h)^i} N_t - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau_{t+i} N_{t+i}}{(1+r_h)^i} \frac{N_t}{N_{t+i}} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i}}{(1+r_h)^i} N_t - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{[(1+r_h)(1+n)]^i} \end{aligned}$$

Dans la consommation agrégée, les impôts futurs agrégés sont escomptés au taux :

$$(1+r_h)(1+n) = \frac{1+r}{1-p} \frac{1-p}{1-b} = \frac{1+r}{1-b}$$

Nota bene : pour $b > 0$, ce taux d'escompte est inférieur à r . La consommation agrégée peut donc s'écrire :

$$C_t = \Omega \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T_{t+i} - G_{t+i})}{(1+r)^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i} N_t}{(1+r_h)^i} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{[(1+r_h)(1+n)]^i} \right\}$$

soit :

$$C_t = \Omega \left\{ - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+r)^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{t+i} N_t}{(1+r_h)^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+r)^i} - \frac{1}{(\frac{1+r}{1-b})^i} \right] T_{t+i} \right\}$$

Si on compare deux sentiers de taxation $\{T_{t+i}^1\}_{i \geq t}$ et $\{T_{t+i}^2\}_{i \geq t}$ qui permettent de financer un même sentier de dépenses $\{G_{t+i}\}_{i \geq t}$, les sentiers de consommation correspondants sont identiques si et seulement si $b = 0$.

15. Dans cette économie, l'argument selon lequel il n'y a pas équivalence ricardienne parce qu'au moment de rembourser la dette on sera peut-être mort est-il valable?

Ici, ce qui compte, ce sont les naissances futures, qui élargissent la base fiscale. La probabilité de mort laisse intacte la contrainte budgétaire intertemporelle des agents : car si je ne meurs pas d'ici demain, la mort ayant frappé d'autres que moi, le fardeau fiscal par tête est plus élevé. En revanche, quand l'horizon des agents est fini de manière certaine, l'argument reste valable.

Bouclage du modèle :

Offre de travail inélastique et technologie transformant une unité de travail en une unité de bien, de sorte que $w_t = 1 \forall t$. Le marché des biens est équilibré lorsque $C_t + G_t = N_t$.

Un équilibre, c'est un taux r , et des quantités $\{c_{s,t}\}$, $\{a_{s,t}\}$, $\{G_t\}$, $\{T_t\}$, et $\{D_t\}$ qui vérifient :

– optimisation individuelle :

$$c_{s,t} = \Omega(a_{s,t} + h_t)$$

– équilibre au niveau agrégé sur le marché des biens et sur les titres émis par l'Etat

$$C_t + G_t = N_t$$

$$A_t = D_t$$

– absence de dérive des finances publiques

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+r)^i} = D_t + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+r)^i}$$

Mise en perspective de la littérature :

– Robert Barro, "Are Government Bonds Net Wealth?", JPE 1974
cas où $p = b = n = 0$.

Il y a équivalence ricardienne.

– Olivier Blanchard, "Debt, Deficits and Finite Horizons", JPE 1985
cas où $p = b > 0$ et $n = 0$.

Non-neutralité de la dette.

Erreur d'interprétation : croire que la non-neutralité vient de $p > 0$.

– Philippe Weil, Harvard PhD Thesis, 1985

cas où $p = 0$, $b = n > 0$.

Non-neutralité de la dette.

Tous ces papiers supposent que la consommation est correctement prédite par la théorie du revenu permanent. Néanmoins, **la présence de contraintes de liquidité** est une bonne raison de penser que le mode de financement des déficits n'est pas neutre, indépendamment des considérations démographiques.

Si les contraintes de liquidité mordent pour certains agents (i.e. leur niveau de consommation optimal – celui prédit par la théorie du revenu permanent – est plus élevé que ce que le niveau de liquidité dont ils disposent), ils utilisent l'augmentation de leur revenu disponible (suite au choix fait par l'Etat d'émettre de la dette plutôt que de prélever des impôts) pour consommer plus et non pas pour épargner en vue des impôts futurs.