François Le Grand
legrand@pse.ens.fr

Séances des 3 et 6 Octobre 2006

Cours de Macroéconomie 4 (Prof. Daniel Cohen)
http://www.pse.ens.fr/junior/legrand/cours.html

TD 1

Modèles dynamiques de "job-search" à la Mortensen-Pissarides

References

Hosios, Arthur J. (1990) "On the efficiency of matching and related models of search and unemployment." *The Review of Economic Studies* 57(2), pp. 279–298

Mortensen, Dale T., and Christopher A. Pissarides (1994) "Job creation and job destruction in the theory of unemployment." *The Review of Economic Studies* 61(3), pp. 397–415

— (1998) "Technological progress, job creation and job destruction." *Review of Economic Dynamics* 1(4), pp. 733–753

Pissarides, Christopher A. (1990) *Equilibrium Unemployment Theory* (Blackwell Publishers). ISBN 0631152148

Points techniques du TD : l'optimisation sous contraintes:

- Lagrangien
- Hamiltonien
- Équation de Bellman

A Description du modèle

On considère le modèle standard à la Mortensen-Pissarides, où les travailleurs et firmes sont neutres au risque.

Les travailleurs

Les travailleurs maximisent la fonction suivante où r désigne le taux d'escompte et $y(s)$ le revenu net à la période s:

$$V_t = \int_t^{\infty} e^{-rs} y(s) ds$$

Les travailleurs employés sont rémunérés au salaire w. Un travailleur au chômage touche le salaire de réserve b (b peut être interprété comme une allocation chômage ou comme le gain du loisir).

Les firmes

Il existe un large nombre d'entreprises, toutes identiques (libre-entrée de firmes). Une firme qui emploie un travailleur produit x ($\equiv$ productivité du travail).

Matching function

On désigne par v le nombre de postes vacants dans les entreprises. Le coût à chaque période pour une firme qui cherche à remplir un poste vacant est γ.
On normalise à 1 la taille de la population active, de sorte que u désigne à la fois le taux de chômage et le nombre de chômeurs.
A chaque période, un travailleur employé a une probabilité instantanée s constante de se retrouver au chômage.
On suppose que le nombre d'embauches à une période donnée est une fonction du nombre de personnes au chômage (u) et du nombre de postes vacants (v):

$$m(u, v)$$

On supposera que la fonction m est à rendements constants, du type : $m(u, v) = u^{\alpha}v^{1-\alpha}$.

B Résolution

1. Exprimer la probabilité instantanée h pour un chômeur de trouver un emploi.

Elle s'écrit simplement: $h = \dfrac{m(u, v)}{u}$.

2. Montrer que h peut s'écrire $\theta q(\theta)$, avec $\theta \equiv \frac{v}{u}$ et q une fonction décroissante. Que représente q ? Les travailleurs ont-ils intérêt à ce que θ soit élevé ou faible ? Exprimer la durée moyenne de vacance d'un poste en fonction de $q(\theta)$.

Comme $m(u, v) = u^{\alpha}v^{1-\alpha}$, *on a :*

$$h = \frac{1}{u}u^{\alpha}v^{1-\alpha} = \left(\frac{v}{u}\right)^{1-\alpha} = \theta q(\theta)$$
$$\textit{avec :} \quad \theta = \frac{v}{u} \ \textit{ et } q(\theta) = \theta^{-\alpha}.$$

La probabilité qu'un poste vacant soit affecté est donnée par $\frac{m(u,v)}{v}$.

$$\frac{m(u, v)}{v} = \frac{1}{v}u^{\alpha}v^{1-\alpha} = q(\theta)$$

donc q est la proba. qu'un poste vacant soit comblé.

Les travailleurs ont intérêt à ce que θ soit élevé. La "tension" du marché du travail est décroissante en $\frac{v}{u}$ (moindre "armée de réserve" – dans les termes de Marx – pour le nombre de postes à pourvoir).
La durée moyenne de vacance d'un poste (en fait l'espérance, mais loi des grands nombres...) est égale à $1/q(\theta)$.

3. Calculer le taux de chômage à l'équilibre stationnaire en fonction de $\{s, h\}$.

$$\dot{u} = s(1-u) - hu$$

A l'état stationnaire: $\dot{u} = 0$*, donc:*

$$u_\infty = \frac{s}{h+s}$$

Cette courbe est connue comme étant la courbe de Beveridge. Le taux de chômage d'équilibre (que l'on pourrait qualifier de "frictionnel") est croissant en s*, le taux de destruction d'emplois (separation rate) et décroissant en* h*, le taux de création d'emplois (hiring rate).*

Pour toutes, les questions suivantes, on se place à l'état stationnaire.
On note J_F (resp. J_V) la valeur actualisée des revenus pour une firme d'une place occupée par un travailleur (resp. la valeur actualisée des revenus pour une firme d'une place vacante).
On note J_E (resp. J_U) la valeur actualisée des revenus pour un travailleur employé (resp. la valeur actualisée des revenus pour un travailleur en recherche d'emploi).

4. Expliquer pourquoi à l'équilibre stationnaire, J_F et J_V vérifient:

$$rJ_F = x - w + s(J_V - J_F)$$

Exprimer de même J_V en fonction J_F et des paramètres du modèles.

1ère méthode : On note $T \geq t$ *la première date où le poste occupé devient libre.*

$$J_V(t) \quad = \quad \mathbb{E}_t\Big[\int_t^T (x-w)e^{-r\,(s-t)}\,ds + e^{-r\,(T-t)}\,J_F(T)\Big]$$

On suppose que T *suit une loi de Poisson de densité* $F : T \mapsto s\,e^{-s\,T}$.

$$\begin{aligned}
J_V(t) &= \int_t^\infty \int_t^T (x-w)e^{-r\,(s-t)}\,ds\,s\,e^{-s\,(T-t)}dT \\
&\quad + \int_t^\infty s\,e^{-(r+s)\,(T-t)}\,J_F(T)dT \\
&= \frac{x-w}{r}s\int_t^\infty \left(1-e^{-r\,(T-t)}\right)\,e^{-s\,(T-t)}dT \\
&\quad + \int_t^\infty s\,e^{-(r+s)\,(T-t)}\,J_F(T)dT \\
&= \frac{x-w}{r}\left(1-\frac{s}{r+s}\right) + \int_t^\infty s\,e^{-(r+s)\,(T-t)}\,J_F(T)dT \\
&= \frac{x-w}{r+s} + \int_t^\infty s\,e^{-(r+s)\,(T-t)}\,J_F(T)dT
\end{aligned}$$

On dérive par rapport à t *pour obtenir :*

$$\dot{J}_V(t) \quad = \quad -\,s\,J_F(t) + (r+s)\int_t^\infty s\,e^{-(r+s)\,(T-t)}\,J_F(T)dT$$

En utilisant l'expression de J_V précédente (avant dérivation), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{J}_V(t) &= -s\,J_F(t) + (r+s)\left(J_V(t) - \frac{x-w}{r+s}\right) \\ &= r\,J_V(t) - s\,(J_F(t) - J_V(t)) - (x-w) \end{aligned}$$

À l'équilibre stationnaire, on a ($\dot{J}_V(t) = 0$) :

$$r\,J_V(t) = x - w + s\,(J_F(t) - J_V(t))$$

2ème méthode : On raisonne entre t et $t+dt$, où l'on suppose que l'état du poste – libre ou occupé – est uniforme. La valeur d'une place occupée en t c'est le bénéfice engendré par ce poste entre t et $t+dt$ ($\equiv (x-w)dt$) augmenté de la valeur du poste en $t+dt$. En $t+dt$, le poste est occupé avec une proba $1 - s\,dt$ (valeur $= J_V(t+dt)$) et libre avec une proba sdt (valeur $= J_F(t+dt)$). Rappelons que s est la proba de séparation de la firme et de l'employé. En espérance, le poste en $t+dt$ a la valeur $s\,dt J_V(t+dt) + (1-s\,dt)J_F(t+dt)$. On en déduit alors :

$$J_F(t) \quad = \quad e^{-r\,dt}\big\{(x-w)\,dt + s\,dt J_V(t+dt) + (1-s\,dt)J_F(t+dt)\big\}$$

En admettant que $e^{-r\,dt} \approx \dfrac{1}{1+r\,dt}$, on obtient :

$$\begin{aligned} (1+rdt)J_F(t) &= (x-w)\,dt + s\,dt J_V(t+dt) + (1-s\,dt)J_F(t+dt) \\ r\,dt\,J_F(t) &= (x-w)\,dt + s\,dt J_V(t+dt) - s\,dt\,J_F(t+dt) \\ &\quad + J_F(t+dt) - J_F(t) \\ r\,J_F(t) &= x - w + s\,J_V(t+dt) - s\,J_F(t+dt) \\ &\quad + \frac{J_F(t+dt) - J_F(t)}{dt} \end{aligned}$$

A l'équilibre stationnaire $J_F(t+dt) = J_F(t)$ et on en déduit la relation voulue

3ème méthode : C'est une equation d'arbitrage similaire à celle que l'on écrit sur les marchés financiers lorsque les agents sont neutres au risque : le revenu d'un placement sans risque (rJ_F) doit être égal aux dividendes versés ($x-w$) plus la variation espérée du prix du stock. Avec proba. instantanée $(1-s)$ la valeur est inchangée[1], avec proba. s, le poste est liquidé et la valeur actualisé du poste devient J_V.

$$rJ_V = -\gamma + q(J_F - J_V)$$

5. Interpréter la condition d'équilibre suivante :

$$\frac{\gamma}{q(\theta)} = \frac{x-w}{r+s}$$

[1] Les différentes dates T de changement d'état du poste sont supposées indépendantes, ce qui est le cas lorsque l'on suppose que le proc suit une loi de Poisson.

Si il y a libre entrée de firmes, les firmes entrent sur le marché du travail tant que le fait d'avoir un poste vacant a une valeur non–nulle; donc à l'équilibre on doit avoir $J_V = 0$. D'où:

$$\frac{\gamma}{q(\theta)} = J_F = \frac{x - w}{r + s}$$

C'est une équation de ***demande de travail*** *de la part des firmes: θ (nombre de vacances p.r. au nombre de chômeurs) est décroissante du salaire.*
Le membre de gauche est l'espérance de coût lié à l'ouverture d'un poste (coût par unité de temps multiplié par l'espérance de durée de vacance).
Le second terme correspond à l'espérance de profits futurs (tant qu'il n'y a pas eu de "séparation", un travailleur rapporte x et coûte w) sur un horizon infini, actualisé en tenant compte de la probabilité exogène de séparation.

6. Exprimer J_E en fonction de J_U et des paramètres du modèles (resp. J_U en fonction de J_E et des paramètres du modèles).

$$\begin{aligned} rJ_E &= w + s(J_U - J_E) \qquad (1) \\ rJ_U &= b + h(J_E - J_U) \end{aligned}$$

Nash-Bargaining et équation de salaire

On suppose que le salaire est déterminé de sorte que la fonction suivante soit maximisée:

$$\max_{(w)} {J_F}^{\beta} (J_E - J_U)^{1-\beta}$$

où β désigne le pouvoir de négociation de la firme.
On notera que le salaire d'équilibre impacte J_U mais que cet effet n'est pas internalisé par le travailleur qui négocie son salaire avec une firme donnée (prenant le salaire d'équilibre comme donné).

7. Montrer que: $\beta\,(J_E - J_U) = (1 - \beta)\,J_F$.
Montrer qu'à l'équilibre, $w = \beta b + (1 - \beta)(x + \gamma\theta)$. Commenter.

$$\max_{(w)} (J_F)^{\beta} (J_E - J_U)^{1-\beta}$$
$$\max_{(w)} \left[\beta \ln(J_F) + (1 - \beta) \ln(J_E - J_U)\right]$$

On remarque que $\frac{\partial J_E}{\partial w} = -\frac{\partial J_V}{\partial w} = -1/(s+r)$. Pour cela dériver l'équation (1) en notant que J_U est constante. Autre possibilité : remarquer que le salaire est un transfert entre la firme et l'employés, tous deux neutres au risque : ce que gagne (perd) l'employé est perdu (gagné) par la firme, d'où $\frac{\partial J_E}{\partial w} = -\frac{\partial J_V}{\partial w}$. La maximisation conduit alors à :

$$-\frac{\beta}{J_F}\frac{\partial J_F}{\partial w} = \frac{1 - \beta}{J_E - J_U}\frac{\partial J_E}{\partial w}$$
$$\beta\,(J_E - J_U) = (1 - \beta)\,J_F$$

A l'équilibre, d'après la question 5), $(J_E - J_U) = \frac{w-b}{r+s+h(\theta)}$ et $J_F = \frac{x-w}{r+s}$
Or $h(\theta) = \theta q(\theta) = \theta\gamma(\frac{r+s}{x-w})$. On en déduit :

$$\beta \frac{w-b}{(r+s)\,(1+\frac{\theta\gamma}{x-w})} = (1-\beta)\,\frac{x-w}{r+s}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \beta\,(w-b) = (1-\beta)\,(x-w+\theta\gamma) \\ &\Leftrightarrow \quad w = \beta b + (1-\beta)\,(x+\gamma\theta) \end{aligned}$$

Equation de salaire: *w augmente avec l'outside–option des travailleurs, leur productivité et le coût de recherche pour la firmes (si cela lui coûte bcp à chaque période, elle augmente les salaires pour faciliter le "match". w augmente avec θ le ratio de places vacantes p.r. au nombre de chômeurs.*

Equilibre sur le marché du travail et statique comparative

8. Représenter graphiquement la détermination de (θ, w) dans le plan (θ, w). Déterminer comment θ, h et u sont affectés par :

- une hausse de b,
- une hausse de γ,
- une baisse de s.

(NB : si on veut étudier l'impact d'allocations chômage plus généreuses, il faut non seulement regarder l'impact sur u qui passe par b mais aussi l'impact qui passe par l'incitation à chercher un emploi qui serait capturé par un facteur d'efficacité dans la fonction de matching).
** une hausse de γ déplace LD vers le bas, θ diminue donc h aussi et u augmente.*
** une baisse de s a un impact direct sur le chômage et un impact indirect via h.*
L'effet direct de $\Delta s < 0$ implique une baisse de u (moins de destructions d'emploi).
L'effet indirect implique une hausse de h (la courbe LD se déplace vers le haut), donc renforce la baisse de u. Ce deuxième effet n'est pas très robuste : si par exemple la diminution de s est consécutive à une augmentation des coûts de licenciement, on s'attend à ce que le hiring rate h diminue.

C Efficience des modèles dynamiques de search: Condition d'Hosios

On cherche à déterminer l'allocation optimale de l'emploi et à la comparer à l'équilibre décentralisé. Le planificateur cherche à maximiser la production sous la contrainte d'évolution de l'emploi.

9. Exprimer le surplus (S) du planificateur à chaque période avec u chomeurs et v postes vacants.

Le surplus est la somme des surplus de l'employé, du chômeur et de la firme.

$$\begin{aligned} S &= w\,(1-u) + b\,u + (x-w)(1-u) - \gamma\,v \\ &= b\,u + x\,(1-u) - \gamma\,v \end{aligned}$$

10. Ecrire le programme du planificateur sous contrainte. Ecrire le Hamiltonien associé. En déduire les conditions du premier ordre.
On introduira $\eta(\theta) = -\frac{\frac{dq}{d\theta}\theta}{q(\theta)}$ (Indication: il est conseillé de prendre $\theta = \frac{v}{u}$ comme variable de contrôle plutôt que v).

$$\begin{aligned} &\max_{u,v} \left\{ \int_t^{\infty} S(\tau) e^{-r\tau} d\tau \right\} \\ s.c \quad : \quad &\dot{u} = s(1-u) - h(u,v)u \end{aligned}$$

$$H = x(1-u) + bu - \gamma v + \lambda\,[s(1-u) - h(u,v)u]$$

Dans ce pb, v est la variable de contrôle et u est la variable d'état.
On transforme le problème en $\{u, \theta\}$:

$$H = x(1-u) + bu - \gamma\theta u + \lambda\,[s(1-u) - \theta q(\theta) u]$$

Les CPO sont les suivantes (se reporter aux notes sur l'optimisation dynamique) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= r\lambda - \dot{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\gamma &= \lambda \frac{d\theta q(\theta)}{d\theta} = \lambda \left(\theta \frac{dq(\theta)}{d\theta} + q(\theta) \right) = \lambda q(\theta)(1-\eta(\theta)) \\ -x + b - \gamma\theta &= [r + s + \theta q(\theta)]\,\lambda - \dot{\lambda} \end{aligned}$$

11. Montrer qu'à l'équilibre stationnaire on a:

$$(1-\eta(\theta))(x-b) - \gamma \frac{[r + s + \eta(\theta)\theta q(\theta)]}{q(\theta)} = 0$$

A l'équilibre stationnaire, $\dot{\lambda} = 0$ donc:

$$\lambda = \frac{-\gamma}{q(\theta)(1-\eta(\theta))}$$

$$\begin{aligned} x - b + \gamma\theta - [r + s + \theta q(\theta)]\,\frac{\gamma}{q(\theta)(1-\eta(\theta))} &= 0 \\ (1-\eta(\theta)(x-b) - \gamma \frac{[r + s + \theta q(\theta)] - \theta q(\theta)(1-\eta(\theta))}{q(\theta)} &= 0 \\ (1-\eta(\theta)(x-b) - \gamma \frac{r + s + \eta(\theta)\theta q(\theta)}{q(\theta)} &= 0 \end{aligned}$$

12. En utilisant les questions 4) et 6), montrer que dans le cas de l'équilibre décentralisé, on a la relation suivante:

$$\beta(x-b)-\gamma\frac{[r+s+(1-\beta)\,\theta q(\theta)]}{q(\theta)}=0$$

On a dans le cadre de l'équilibre décentralisé: $w=\beta b+(1-\beta)(x+\gamma\theta)$ *et* $\frac{\gamma(r+s)}{q(\theta)}=x-w$

$$\begin{aligned}\beta\,(x-b)-(1-\beta)\,\gamma\theta-\frac{\gamma\,(r+s)}{q(\theta)} &= 0\\ \beta\,(x-b)-\gamma\frac{(r+s)-(1-\beta)\,\theta q(\theta)}{q(\theta)} &= 0\end{aligned}$$

13. En déduire à quelle condition l'équilibre décentralisé est efficient. C'est la **Condition d'Hosios**. Comment s'écrit cette condition lorsque la fonction de matching est Cobb–Douglas. Commenter.

$$1-\beta=\eta(\theta)$$

Si fonction de matching Cobb-Douglas:

$$1-\beta=\alpha$$

L'équilibre décentralisé est efficient lorsque le pouvoir de négociation des travailleurs $(1-\beta)$ *est égal à l'élasticité de la fonction de matching. Pourquoi? Travailleurs et entreprises génèrent des externalités de congestion: lorsque* $\eta(\theta)$ *est élevé, les entreprises génèrent des externalités négatives importantes sur le processus de matching. Ainsi, le planificateur veut limiter l'entrée de firmes: une façon d'implémenter l'optimum est de donner beaucoup de pouvoir de négociations aux travailleurs. L'équilibre de laissez-faire, peut générer un niveau trop élevé de chômage (lorsque* $1-\beta>\eta(\theta)$*): les travailleurs ont trop de poids dans la négociation, les salaires sont trop élevés et le niveau de création d'emploi est trop faible. L'opposé advient lorsque* $1-\beta<\eta(\theta)$*: il y a un niveau inefficace d'emploi (trop peu de chômage!) dans cette économie et les salaires sont trop faibles.*